

الباب الثالث: المقاييس الإحصائية الوصفية

الشروط الواجب توفرها في المقياس الجيد :

- أن يتم تحديد قيمته بالضبط ولا تترك للتقدير الشخصي .
- أن تدخل جميع البيانات أو المشاهدات في حسابه .
- سهولة فهمه وحسابه .
- قابليته للتعامل الجبري .
- عدم تأثره بالقيم الشاذة (المتطرفة).

المقاييس الإحصائية الوصفية

١ - مقاييس النزعة المركزية: Measures of Central Tendency

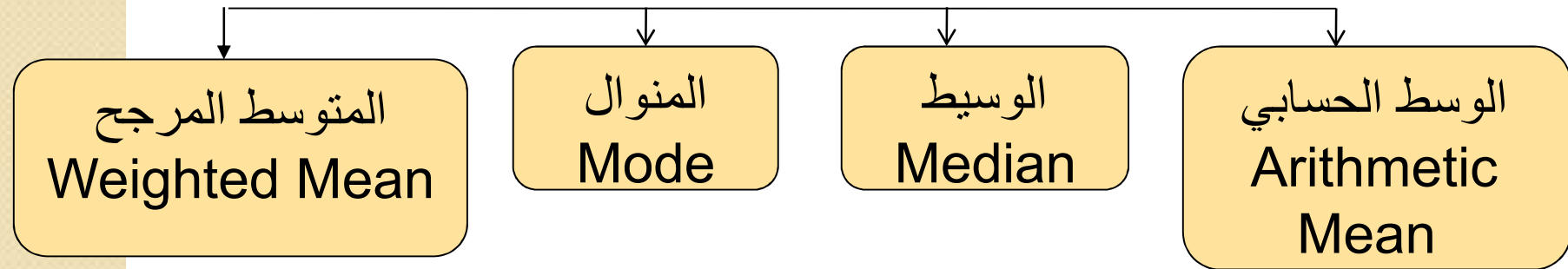
هي قيم مركزية (متوسطة) تتمركز أو تتوزع حولها البيانات.

٢ - مقاييس التشتت: Measures of Central Tendency

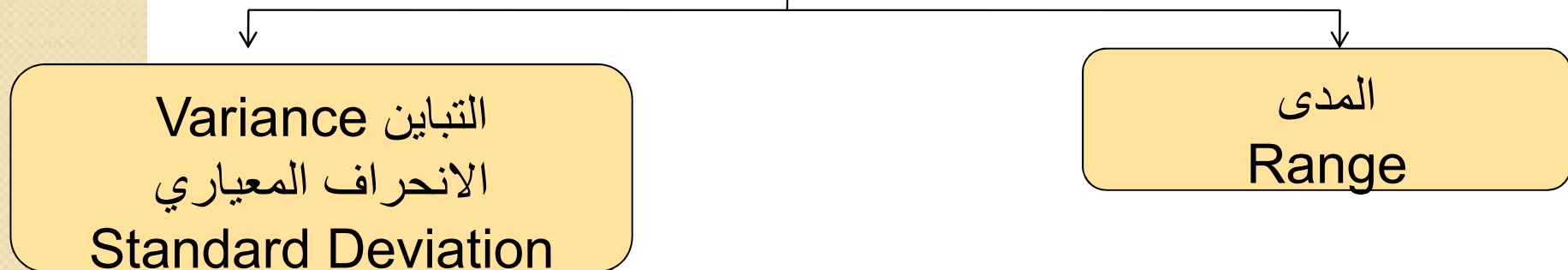
هي درجة تقارب أو تباعد البيانات عن بعضها البعض.

المقاييس الإحصائية الوصفية

مقاييس النزعة المركزية



مقاييس التشتت



مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

١- الوسط الحسابي

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات، بأنه حاصل جمعها مقسوماً على عددها، يرمز للوسط الحسابي بالرمز μ ليمثل متوسط المجتمع أو $\bar{x}$ ليمثل متوسط العينة.

طرق حسابه في حالة البيانات الغير مبوبة

(بيانات العينة):

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

حيث: $\sum x$: مجموع بيانات العينة
n: عدد بيانات العينة

(بيانات المجتمع):

$$\mu_x = \frac{\sum x}{N}$$

حيث: $\sum x$: مجموع بيانات المجتمع
N: عدد بيانات المجتمع

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

• مثال (٣-١):

احسبى الوسط الحسابى للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية
المكونة من خمس عمال باحدى القطاعات:

60 90 80 70 50

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{(50 + 70 + 80 + 90 + 60)}{5} = \frac{350}{5} = 70\$$$

يراعى أن يكون الوسط الحسابى بين أصغر قيمة و أكبر قيمة ضمن البيانات

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

• مثال (٣-٢):

البيانات التالية تمثل عدد ايام الأجازات السنوية التي حصل عليها 9 أشخاص اختيروا من مدن مختلفة بالمملكة. احسبى الوسط الحسابى لعدد ايام الأجازات السنوية من هذه العينة.

20 26 40 36 32 42 35 24 30

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{(30 + 24 + 35 + 42 + 23 + 36 + 40 + 26 + 20)}{9} = \frac{276}{9} = 30.7 \text{ يوم}$$

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

مثال (٣-٢):

شركة لديها ٦ مصانع موزعة في مناطق مختلفة لإنتاج نفس المنتج وتبلغ السعة الانتاجية للوحدات من هذا المنتج في هذه المصانع كما يلي:

٣٠٠ ٢٠٠٠ ١٠٠٠ ٣٥٠٠ ٢٥٠٠ ١٢٠٠

و المطلوب: حساب متوسط انتاج الشركة من هذا المنتج.

الحل:

$$\mu_x = \frac{\sum x}{N} = \frac{(1200 + 2500 + 3500 + 1000 + 2000 + 3000)}{6} = \frac{13200}{6} = 2200 \text{ وحدة}$$

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

المتوسط المرجح: ($\bar{X}_w$)

هو مجموع حواصل ضرب القيم في أوزان مخصصة لكل منها مقسوم على مجموع هذه الأوزان.

$$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

حيث : $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي قيم العينة

و التي لها الأوزان $w_1, w_2, \dots, w_n$

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

• مثال (٣-٢٨):

أوجد المتوسط المرجح لدرجات أحد الطلاب في ثلاث مقررات باحد الفصول الدراسية حيث كانت درجاته هي ٥٠ ، ٧٠ ، ٤٠ و كانت الساعات المعتمدة هي ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب.

الحل:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{(2)(40) + (3)(70) + (4)(50)}{2 + 3 + 4}$$

$$\bar{x}_w = \frac{80 + 210 + 200}{9} = \frac{490}{9} = 54.4 \quad \text{درجة}$$

مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي)

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

المزايا

- تدخل جميع القيم في حسابه.
- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.
- يعتبر الأساس في معظم عمليات الإحصاء الاستدلالي.

العيوب

- لا يمكن إيجاده للبيانات الوصفية.
- يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة).
- لا يمكن إيجاده بالرسم.

مقاييس النزعة المركزية (الوسيط)

٢- الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (٥٠%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويرمز له بالرمز (m) . ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طرق حسابه (في حالة البيانات غير المبوبة)

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$

تمثل n من بيانات العينة فإن يجب اتباع الآتي:

إذا كان الناتج عدد صحيح فإن
الوسيط هو القيمة التي تقع في هذا
الموقع مباشرة

١- ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا.

$$٢- \text{نوجد موقع الوسيط} = \frac{n + 1}{2}$$

إذا كان الناتج كسر فإن
الوسيط هو متوسط القيمتين التي وقع
الوسيط بينهما.

مقاييس النزعة المركزية (الوسيط)

مثال (3 - 10)

احسب وسيط الأجور اليومية بالدولار للبيانات الآتية والتي تمثل عينتين من العمال مختارتين من شركتين مختلفتين:

العينة (1) :	50	70	80	90	60
العينة (2) :	50	70	80	90	60
					100

الحل:

العينة (1) : لحساب قيمة الوسيط :

١ - نرتب القيم تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90

٢ - نوجد موقع الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (النتيجة عدد صحيح)

، حيث أن الناتج عدد صحيح إذن الوسيط هو القيمة التي موقعها 3

نجد أن قيمة الوسيط = $m = \$70$

مقاييس النزعة المركزية (الوسيط)

العينة (2): 50 70 80 90 60 100

لحساب قيمة الوسيط:

١- نرتب القيم تصاعديا فتصبح

50 60 70 80 90 100

٢- نوجد موقع الوسيط وهو $3.5 = \frac{7}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{n+1}{2}$ (عدد كسري)

حيث أنه عدد كسري إذن الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما 3 و 4

$$\text{نجد ان الوسيط } m = \frac{70+80}{2} = \$75$$

مقاييس النزعة المركزية (الوسيط)

مزايا و عيوب الوسيط

العيوب

- لا تدخل جميع القيم في حسابه أو إيجاداه
- قد يصعب استخدامه في الإحصاء الاستدلالي لصعوبة إمكانية معالجته بالطرق الجبرية.
- لا يمكن إيجاداه للبيانات الوصفية (الاسمية).

المزايا

- سهولة حسابه أو إيجاداه .
- لا يتأثر بالقيم الشاذة.
- يمكن إيجاداه بالرسم .

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

٣- المنوال

هو المفردة ذات القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً. ويرمز له بالرمز D

بيانات عديمة المنوال
أو
لا يوجد لها المنوال

في حالة عدم وجود
أي قيمة من البيانات
ذات تكرار أكثر من
غيرها من القيم

بيانات ثنائية المنوال
أو
عديدة المنوال

إذا تكررت قيمتين أو أكثر
من البيانات أكثر من غيرها
وكذلك تكراراتهم متساوية

بيانات وحيدة المنوال

إذا تكررت قيمة
واحدة من البيانات
أكثر من غيرها

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

مثال (١):

البيانات التالية تمثل أعمار خمسة من الطلبة في إحدى الجامعات

٢٥ ٢١ ١٨ ٢٠ ٢٠

أوجد المنوال ؟

الحل:

المنوال = القيمة الأكثر تكراراً

المنوال = ٢٠

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

• مثال (٢): (بيانات وصفية ترتيبية)

البيانات الآتية تمثل تقديرات ١٠ طلاب
فى المدخل الى علم النفس:

D C D B A C D F D F

اوجدى منوال التقديرات لهؤلاء الطلاب.

الحل:

D = المنوال

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

مثال (٣): (بيانات لها أكثر من منوال)

البيانات التالية تمثل عدد الأشخاص في عدد من الشقق السكنية أوجد منوال :

٢ ٧ ٧ ٤ ٥ ٤ ٩ ٧ ٤ ٣ ٥

الحل:

هناك منوالان : المنوال الأول = ٤ ، المنوال الثاني = ٧ ،
لأن كليهما تكررا ثلاث مرات أكثر من غيرهما.

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

- مثال (٤): (بيانات لا منوال لها)
البيانات التالية تمثل الوزن لمجموعة من الأشخاص اوجد
المنوال:

٥٠ ٥٥ ٤٥ ٤٠ ٤٩

الحل:

لا يوجد منوال لأن جميع القيم لها نفس التكرار.

مقاييس النزعة المركزية (المنوال)

مزايا و عيوب المنوال

العيوب

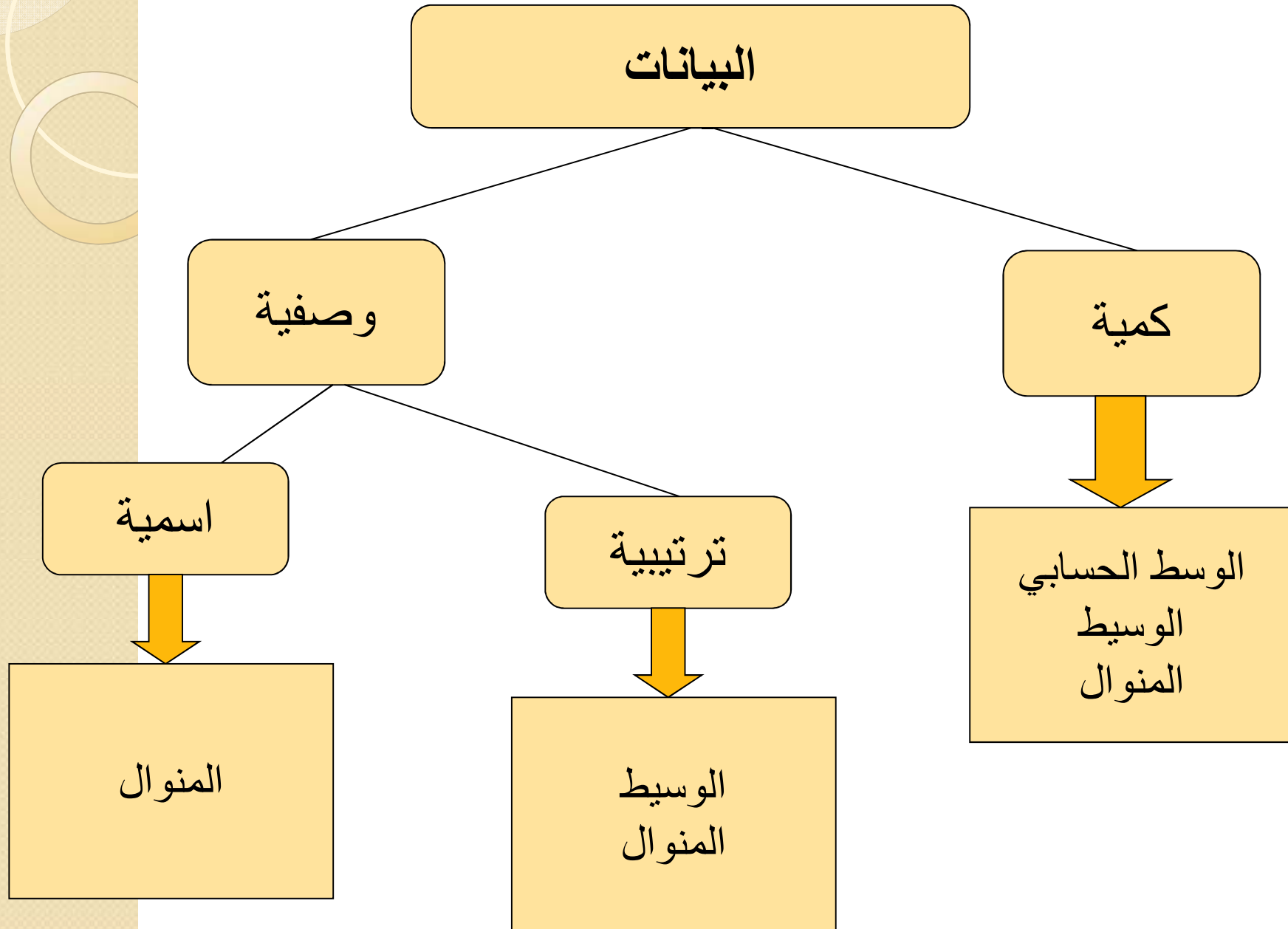
- عدم دخول جميع القيم في حسابه أو إيجاده.
- يعاب على المنوال أنه قد لا يوجد و ذلك في الحالات التي تتساوى فيها تكرارات المشاهدات، وقد يوجد أكثر من منوال.

المزايا

- سهولة حسابه أو إيجاده.
- لا يتأثر بالقيم الشاذة.
- يعتبر المقياس الوحيد للنزعة المركزية الذي يمكن إيجاده للبيانات الوصفية (الاسمية).
- يمكن إيجاده بالرسم .

مقارنة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال

- الوسط الحسابي يفضل على غيره من المتوسطات (الوسيط والمنوال) لكونه أدقها وأكثرها ثباتاً.
- في حالة وجود قيم شاذة في البيانات يفضل الوسيط أو المنوال على الوسط الحسابي لتأثره بالقيم المتطرفة.
- يستخدم المنوال في حالة البيانات الوصفية الاسمية.
- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوى صفر.



مقاييس التشتت (المدى)

١- المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة من البيانات، ويرمز له بالرمز (R).

مثال (٣ - ٣٣) :

البيانات الآتية تمثل أسعار سهم شركة معينة خلال خمسة أيام بالريال السعودي :

50 70 80 90 60

احسبى المدى .

الحل:

أكبر قيمة = ٩٠

أقل قيمة = ٥٠

المدى = $R = 90 - 50 = 40$ ريال سعودي

مقاييس التشتت (المدى)

إذا كانت لدينا بيانات حول درجات الذكاء لمجموعتين من الأطفال في أحد المدارس على النحو التالي :

القيمة الصغرى لدرجات الذكاء	القيمة الصغرى لدرجات الذكاء	متوسط درجات الذكاء	
115	95	105	المجموعة الأولى
135	75	105	المجموعة الثانية

المطلوب : حساب المدى للمجموعتين و التعليق عليه .

الحل :

$$R = 115 - 95 = 20$$

المدى للمجموعة الأولى

$$R = 135 - 75 = 60$$

المدى للمجموعة الثانية

وهذا يعني أن الاختلاف في التشتت بين المجموعتين واضح جداً .

مما يدل على أن مدى المجموعة الثانية يساوي ثلاثة أمثال مدى المجموعة الأولى .

ولهذا نتوقع أن أداء المجموعة الأولى يكون أحسن من أداء المجموعة الثانية في المدرسة

لكون درجات الذكاء للمجموعة الأولى أكثر تجانساً من المجموعة الثانية .

مقاييس التثنت (المدى)

مزاي و عيوب المدى

العيوب

- لا يدخل في حسابه إلا قراءتين.
- يتأثر بالقيم الشاذة.

المزايا

- سهولة حسابه .
- مقياس يعطي فكرة سريعة عن تثنت البيانات.

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري)

٢- التباين والانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين. والتباين لبيانات المجتمع هو عبارة عن متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بينما التباين لبيانات العينة هو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على (عدد هذه القيم مطروح منه واحد).

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري)

طرق حسابه في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_N$ تمثل N من ييلت المجتمع، بمتوسط حسابي (μ) ، وكلت هذه المشاهدات تعبر عن جميع ييلت المجتمع تحت الدراسة، فان التباين والانحراف المعياري لهذا المجتمع يحسبان عن طريق الصيغتين التاليتين على التوالي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري)

طرق حسابه في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل n من بيانات العينة، بمتوسط حسابي $(\bar{x})$ ، وكانت هذه المشاهدات تعبر عن عينة مأخوذة من مجتمع الدراسة، فإن التباين والانحراف المعياري لهذه العينة يحسبان عن طريق الصيغتين التاليتين على التوالي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$S = \sqrt{S^2}$$

هناك طريقة مختصرة لحساب الانحراف المعياري كالتالي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right]}{n-1}}$$

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري)

مثال (٣-٤):

أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد مرات التداول اليومي خلال أيام العمل الرسمية من أحد حسابات بنك ما: 4 7 3 0 8

x	8	0	3	7	4	$\sum x = 22$
x^2	64	0	9	49	16	$\sum x^2 = 138$

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \left[\frac{(\sum x)^2}{n} \right]}{n - 1}$$
$$S^2 = \frac{138 - \left[\frac{(22)^2}{5} \right]}{4} = \frac{138 - 96.8}{4} = \frac{41.2}{4} = 10.3$$

التباين

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{10.3} = 3.21$$

الانحراف المعياري

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري) مثال :

احسبي الانحراف المعياري للأجور اليومية بالدولار للعينة التالية المكونة من خمس عمال
بأحدى القطاعات : 50 70 80 90 60

x	60	90	80	70	50	$\sum x = 350$
x^2	3600	8100	6400	4900	2500	$\sum x^2 = 25500$

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \left[\frac{(\sum x)^2}{n} \right]}{n - 1}$$

$$S^2 = \frac{25500 - \left[\frac{(350)^2}{5} \right]}{4} = \frac{25500 - 24500}{4} = 250$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{250} = 15.81$$

التباين:

الانحراف المعياري:

مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري)

بعض خواص التباين والانحراف المعياري :

- لا تتأثر قيمتا التباين والانحراف المعياري بطرح أو إضافة مقدار ثابت لجميع القيم.
- تتأثر قيمتا التباين والانحراف المعياري بضرب جميع القيم في مقدار ثابت.

مزايا وعيوب الانحراف المعياري

العيوب

- تأثره بالقيم الشاذة.
- لا يمكن حسابه للبيانات الوصفية.

المزايا

- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.
- تدخل جميع القيم في حسابه ولذلك يعتبر من أدق مقاييس التشتت.
- له نفس وحدة القياس للظاهرة محل الدراسة.

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الاختلاف)

١- معامل الاختلاف Coefficient of Variation

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين في وحدة القياس أو في القيمة المتوسطة لهما. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتاً من الأخرى. ويرمز له بالرمز $C.V.(X)$

طرق حسابه

<u>حسابه من بيانات المجتمع</u>	<u>حسابه من بيانات العينة</u>
$C.V.(X) = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \quad \%$	$C.V.(X) = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 \quad \%$

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الاختلاف)

مثال (٣-٤٧):

فى دراسة لمستوى أداء طلاب المرحلة الثانوية فى المدارس الحكومية و الخاصة فى اختبار القدرات و القياس، تم اخذ عينتين عشوائيتين من المجتمعين محل الدراسة فكانت النتائج التالية:

المقاييس الوصفية لاختبار القدرات و القياس		
الانحراف المعياري	الوسط الحسابي	
8	65	طلاب المدارس الحكومية (A)
15	70	طلاب المدارس الخاصة (B)

المطلوب ايهما اكثر تشتتا مجتمع طلاب المدارس الحكومية أم الخاصة؟

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الاختلاف)

الحل:

$$c.v.(A) = \frac{s_A}{x_A} \times 100 = \frac{8}{65} \times 100 = 12.3\%$$

$$c.v.(B) = \frac{s_B}{x_B} \times 100 = \frac{15}{70} \times 100 = 21.4\%$$

مجتمع طلاب المدارس الحكومية أكثر تجانساً من مجتمع طلاب المدارس الخاصة.

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الالتواء)

٢- معامل الالتواء Skewness

هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

طريقة حسابه

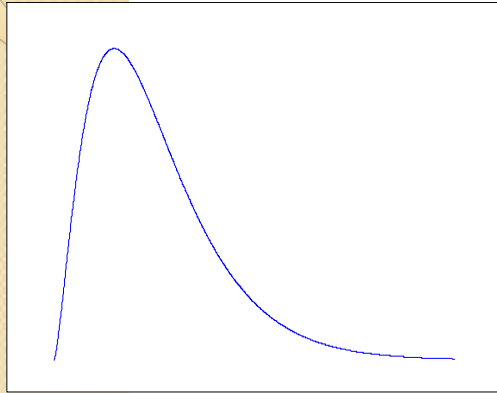
معامل الالتواء الثاني (يحسب عن طريق الوسيط)

$$s.k.(II) = \frac{3(\bar{x} - m)}{S}$$

معامل الالتواء الأول (يحسب عن طريق المنوال)

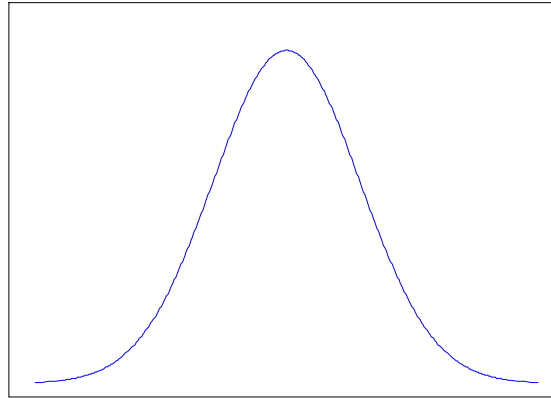
$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{S}$$

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الالتواء)



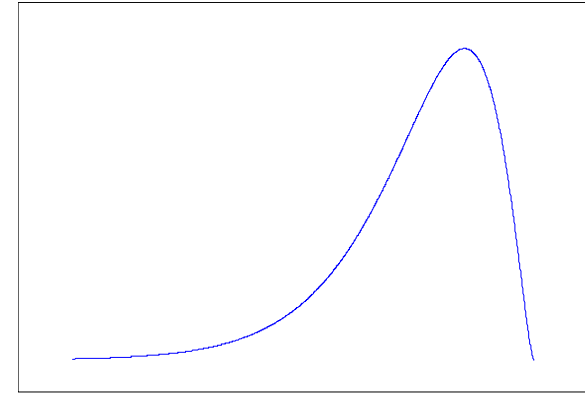
التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليمين
معامل الالتواء = قيمة
موجبة

$$\bar{x} > m > D$$



التوزيع متماثل
معامل الالتواء = 0

$$\bar{x} = m = D$$



التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليسار
معامل الالتواء = قيمة
سالبة

$$\bar{x} < m < D$$

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الالتواء)

مثال (٣-٤٩):

الجدول التالي يعطي بعض المقاييس الوصفية لمبالغ الاستثمارات (بالمليون ريال) لـ (٤٠) شركة، و المطلوب قياس معامل الالتواء المناسب لهذه البيانات:

الانحراف المعياري	المنوال	الوسط الحسابي
10.43	153	152

الحل:

$$s.k.(I) = \frac{\bar{x} - D}{S} = \frac{152 - 153}{10.43} = -0.096$$

شكل توزيع مبالغ الاستثمارات لهذه الشركات ملتو جهة اليسار.

العلاقة بين المتوسطات والتشتت (معامل الالتواء)

مثال (٣-٥٠):

الجدول التالي يوضح بعض المقاييس الوصفية للمصروفات (بالمليون ريال) لـ (50) شركة، والمطلوب دراسة تماثل توزيع المصروفات لهذه الشركات:

الانحراف المعياري	الوسيط	الوسط الحسابي
8.27	62.67	65.52

الحل:

$$s.k.(II) = \frac{3(\bar{x} - m)}{S} = \frac{3(65.52 - 62.67)}{8.27} = 1.03$$

التوزيع موجب الالتواء فهو ملتو جهة اليمين.